Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych - różniczka zupełna i jej zastosowania

Niech $z = f(x,y)$ będzie funkcją dwóch zmiennych niezależnych, określoną i posiadającą pierwsze pochodne cząstkowe w pewnym otoczeniu punktu $P_0(x_0, y_0)$.

Definicja. *Przyrostem* Δz funkcji $z = f(x,y)$ między punktami $P_0(x_0, y_0)$ i $P_1(x_0 + dx, y_0 + dy)$, gdzie dx i dy są dowolnymi przyrostami zmiennych niezależnych x i y nazywamy różnicę określoną wzorem:

(7) $$\Delta z = f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0).$$

Definicja. *Różniczką zupełną dz* funkcji $z = f(x,y)$ w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ dla przyrostów dx i dy nazywamy wyrażenie:

(8) $$dz = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy \quad , \quad (dx)^2 + (dy)^2 > 0.$$

Uwaga. Dla małych przyrostów dx i dy zachodzi związek:

(9) $$\Delta z \approx dz.$$

Możemy zatem zapisać:

(10) $$f(x_0 + dx, y_0 + dy) \approx f(x_0, y_0) + dz.$$

Wzory powyższe wykorzystujemy często w obliczeniach przybliżonych oraz przy szacowaniu błędów pomiarów. Jeżeli na przykład obliczamy wartość funkcji $z = f(x,y)$ w punkcie $P_0(x_0, y_0)$, przy czym wielkości x_0 i y_0 obarczone są błędami odpowiednio dx i dy, to wartość $f(P_0)$ obliczona dla niedokładnych wartości argumentów x_0 i y_0 obarczona jest błędem

$$\Delta z = f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0).$$

Chodzi nam o oszacowanie błędu Δz, gdy znane są błędy dx i dy.

Korzystając ze wzoru (9) otrzymujemy:

$$\Delta z \approx f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy \quad ,$$

a stąd

$$|\Delta z| \le |f'_x(x_0, y_0)||dx| + |f'_y(x_0, y_0)||dy|.$$

Oznaczając przez $\Delta_z, \Delta_x, \Delta_y$ maksymalne błędy bezwzględne wielkości z, x i y otrzymujemy:

$$\Delta_z = |f'_x(x_0, y_0)|\Delta_x + |f'_y(x_0, y_0)|\Delta_y.$$

Przykład. Znaleźć przybliżoną wartość wyrażenia:

$$\sqrt{(1{,}02)^3 + (1{,}97)^3}\ .$$

Rozwiązanie. Wprowadźmy oznaczenia:

$$z = f(x,y) = \sqrt{x^3 + y^3}\ ,$$

$$x_0 = 1\ ,\quad y_0 = 2\ ,\quad dx = 0{,}02\ ,\quad dy = -0{,}03\ .$$

Stąd mamy:

$$\sqrt{(1,02)^3+(1,97)^3}=f(1,02\,,\,1,97)=f(1+0,02\,,\,2+(-0,03))\,.$$

Aby skorzystać, ze wzoru

$$f(x_0+dx\,,y_0+dy)\approx f(x_0\,,y_0)+dz$$

obliczamy najpierw

$$f(x_0\,,y_0)=f(1,2)=\sqrt{1+8}=\sqrt{9}=3\,.$$

Z kolei, aby wyznaczyć dz wyznaczamy wartości pochodnych cząstkowych w punkcie $(x_0\,,y_0)$:

$$f_x'(x,y)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}\,,\qquad \text{stąd}\quad f_x'(x_0\,,y_0)=f_0'(1,2)=\frac{3\cdot1^2}{2\cdot\sqrt{1+8}}=\frac{3}{2\cdot3}=\frac{1}{2}\,,$$

$$f_y'(x,y)=\frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}\,,\qquad \text{stąd}\quad f_y'(x_0\,,y_0)=f_0'(1,2)=\frac{3\cdot2^2}{2\cdot\sqrt{1+8}}=\frac{3\cdot4}{2\cdot3}=2\,.$$

Obliczamy różniczkę zupełną:

$$dz=f_x'(x_0\,,y_0)dx+f_y'(x_0\,,y_0)dy=\frac{1}{2}\cdot0,02+2\cdot(-0,03)=0,01-0,06=-0,05\,.$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\sqrt{(1,02)^3+(1,97)^3}=f(1+0,02\,,\,2+(-0,03))\approx3+(-0,05)=2,95\,.$$

Przykład. Określić maksymalny błąd bezwzględny i względny, jaki popełnimy obliczając opór R ze wzoru

$$R=\frac{U}{I}\,,$$

gdzie napięcie $U_0=220V$ na końcach przewodnika zmierzono z błędem $\Delta_U=2V$, natężenie zaś $I_0=30A$ z błędem $\Delta_I=0,5A$.

Rozwiązanie. Korzystamy ze wzoru:

$$\Delta_R=\left|R_U'(U_0,I_0)\right|\cdot\Delta_U+\left|R_I'(U_0,I_0)\right|\cdot\Delta_I\,.$$

Wyznaczamy odpowiednie pochodne cząstkowe oraz ich wartości dla U_0 i I_0:

$$R_U'(U,I)=\frac{1}{I}\,,\quad \text{to}\quad R_U'(U_0,I_0)=R_U'(220,30)=\frac{1}{30}\,.$$

$$R_I'(U,I)=-\frac{U}{I^2}\,,\ \text{to}\quad R_I'(U_0,I_0)=R_I'(220,30)=-\frac{220}{30^2}=-\frac{220}{900}=-\frac{11}{45}\,.$$

Stąd

$$\Delta_R=\left|\frac{1}{30}\right|\cdot2\;+\;\left|-\frac{11}{45}\right|\cdot0,5\approx0,19\,.$$

Zatem błąd bezwzględny nie przekroczy $0,19\ \Omega$.

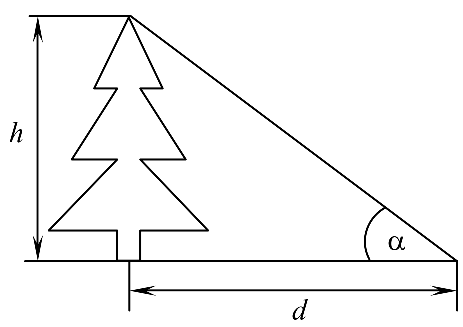
Błąd względny obliczamy w następujący sposób:

$$\frac{\Delta_R}{R} = \frac{0,19}{\frac{220}{30}} \approx 0,026.$$

Błąd względny nie przekracza zatem 2,6%.

Przykład. Wysokość pewnego drzewa oszacowano na podstawie odległości d miejsca pomiaru od pnia drzewa oraz kąta α widzenia drzewa. Otrzymano następujące wyniki pomiaru: $d_0 = 40\,[m]$, $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$, przy czym dokładność pomiaru odpowiednich wielkości wynosiła: $\Delta_d = 0,1\ [\mathrm{m}]$, $\Delta_\alpha = 0,02$ [rad]. Na podstawie tych danych obliczyć przybliżoną wysokość drzewa oraz ocenić dokładność tego przybliżenia.

Rozwiązanie.



Z treści zadania wiemy, że:

$d_0 = 40$, $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$, $\Delta_d = 0,1$, $\Delta_\alpha = 0,02$.

Wysokość drzewa h można wyrazić następującym wzorem:

$$h(d,\alpha) = d \cdot \mathrm{tg}\alpha.$$

Stąd obliczamy przybliżoną wysokość drzewa:

$$h(d_0,\alpha_0) = d_0 \cdot \mathrm{tg}\alpha_0 = 40 \cdot \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 40.$$

Dokładność obliczeń (maksymalny błąd bezwzględny) można obliczyć ze wzoru

$$\Delta_h = \left|h'_d(d_0,\alpha_0)\right| \cdot \Delta_d + \left|h'_\alpha(d_0,\alpha_0)\right| \cdot \Delta_\alpha.$$

Obliczamy:

$h'_d(d,\alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$, stąd $h'_d\left(40, \frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1$.

$h'_\alpha(d,\alpha) = \frac{d}{\cos^2\alpha}$, stąd $h'_\alpha\left(40, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{40}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = \frac{40}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 80$.

Zatem $\Delta_h = |1| \cdot 0,1 + |80| \cdot 0,02 = 0,1 + 1,6 = 1,7$.

Błąd bezwzględny jaki popełnimy przy obliczeniu wysokości drzewa nie przekroczy 1,7 m.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Obliczyć różniczkę zupełną funkcji:

45. $f(x,y) = x^2y^3$, **46.** $f(x,y) = y\ln x$,

47. $f(x,y) = y^x$, **48.** $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Znaleźć przybliżoną wartość wyrażenia:

49. $(1,04)^{2,03}$, **50.** $(1,02)^3 \cdot (0,99)^4$, **51.** $\mathrm{arctg}\left(\frac{1,97}{1,02} - 1\right)$.

52. Wysokość i promień podstawy stożka zmierzono z dokładnością ± 1 mm. Otrzymano $h = 350$ mm oraz $r = 145$ mm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć objętość tego stożka.

53. Obliczyć, jaki popełnimy maksymalny błąd bezwzględny i względny przy obliczeniu objętości prostopadłościanu o krawędziach wyznaczonych z dokładnością: $x = 4{,}1 \pm 0{,}1$, $y = 3{,}2 \pm 0{,}1$, $z = 8{,}4 \pm 0{,}2$.

54. Objętość pewnego ciała zmierzona przy pomocy menzurki z dokładnością $\Delta_V = 0{,}1$ cm^2 wynosi $V = 30$ cm^3, natomiast masa tego ciała ustalona za pomocą wagi z dokładnością $\Delta_m = 1$ g jest równa $m = 200$ g. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć gęstość ρ tego ciała?

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch